Lec 19

$\boxed{5}$ the map $w = \cosh z$

$w = \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$u = \cosh x \cos y$

$v = \sinh x \sin y$

ـــ مطلوب إيجاد معادلات تحتوي u, v, x ومعادلة تحتوي على u, v, i .

$$\frac{u^2}{\cosh^2 x} + \frac{v^2}{\sinh^2 x} = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 y} = 1$$

$\boxed{6}$ the map $w = \sin z$ $\cancel{w = \sin(x+iy)}$

$w = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$u = \sin x \cosh y$

$v = \cos x \sinh y$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$$ قطع ناقص

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$ قطع زائد

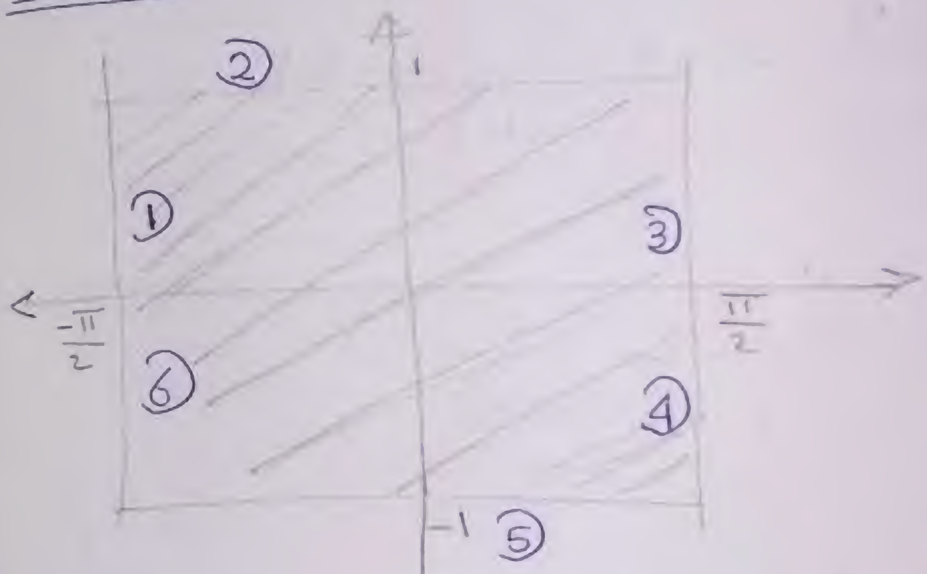
$\boxed{Ex}$ conform the region $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$-1 \le y \le 1$ by the map $w = \sin z$

<u>الحل</u>

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$$

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$



$u = \sin x \cosh y$

$v = \cos x \sinh y$

$\boxed{2}$ Lec 19

at $x = \frac{-\pi}{2}$ $\quad u = -\cosh y \;,\; v = 0$

← إذا كانت النقطة عند التعويض في الصور القياسية تعطي (∞) نعوض في u , v .

← لأن $x = \frac{-\pi}{2}$ تعطي مشكلة في التعويض في الوضعيات السابقة وال ($\cosh$) دالة تأكل الإشارة لابد من خط الجزء الموجب لوحده والجزء السالب لوحده..

$$0 \leq y \leq 1$$

$y = 0 \Rightarrow u = -\cosh 0 = -1$

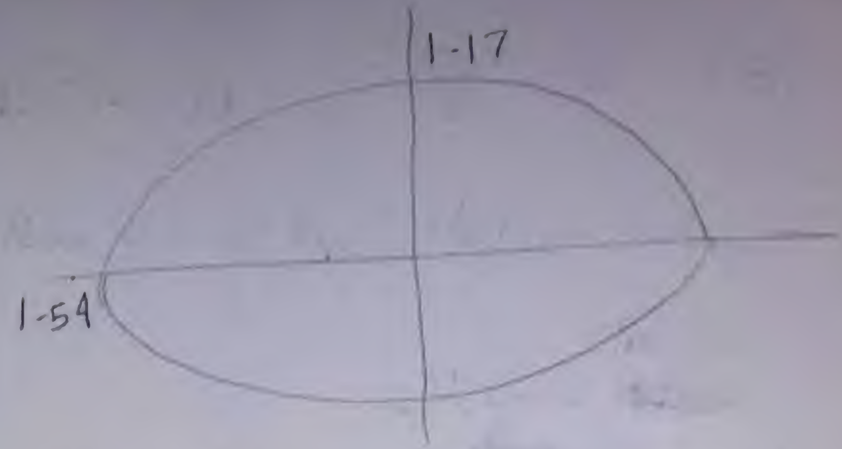
$y = 1 \Rightarrow u = \cosh 1 = -1.54$

at $y = 1$

$$\frac{u^2}{\cosh^2(1)} + \frac{v^2}{\sinh^2(1)} = 1$$

$$\frac{u^2}{(1.54)^2} + \frac{v^2}{(1.17)^2} = 1$$

أول الرسمة الثانية هي ← نهاية الرسمة الأولى.

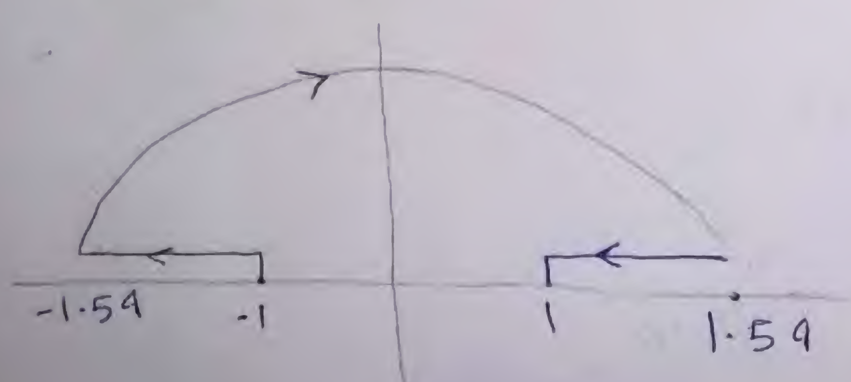


$\Downarrow$

at $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = \cosh y \;,\; v = 0 \quad 1 \xrightarrow{y} 0$

at $y = 1$ $\quad u = \cosh 1 = 1.54$

at $y = 0$ $\quad u = \cosh 0 = 1$

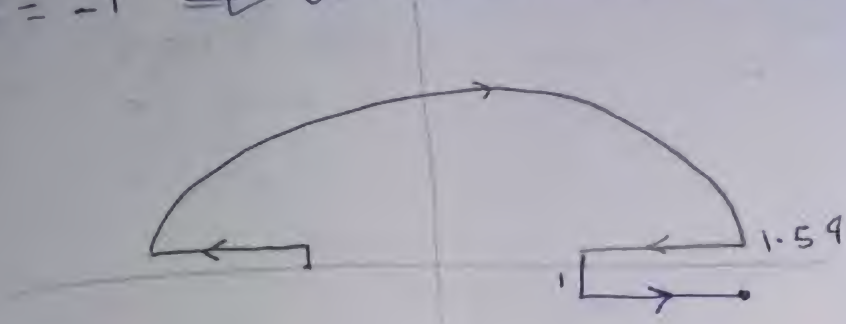


at $x = \frac{\pi}{2}$; $0 \xrightarrow{y} 1$

$u = \cosh y$, $v = 0$

at $y = 0 \Rightarrow u = \cosh(0) = 1$

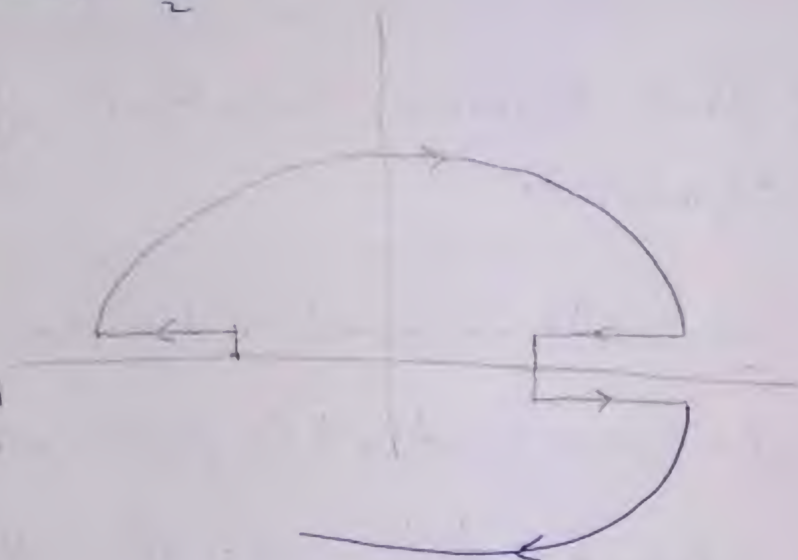
at $y = -1 \Rightarrow u = \cosh(-1) = 1.54$



at $y = -1$ $\quad \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x} -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{u^2}{\cosh^2(-1)} + \frac{v^2}{\sinh^2(-1)} = 1$$

$$\frac{u^2}{(1.54)^2} + \frac{v^2}{(1.17)^2} = 1$$



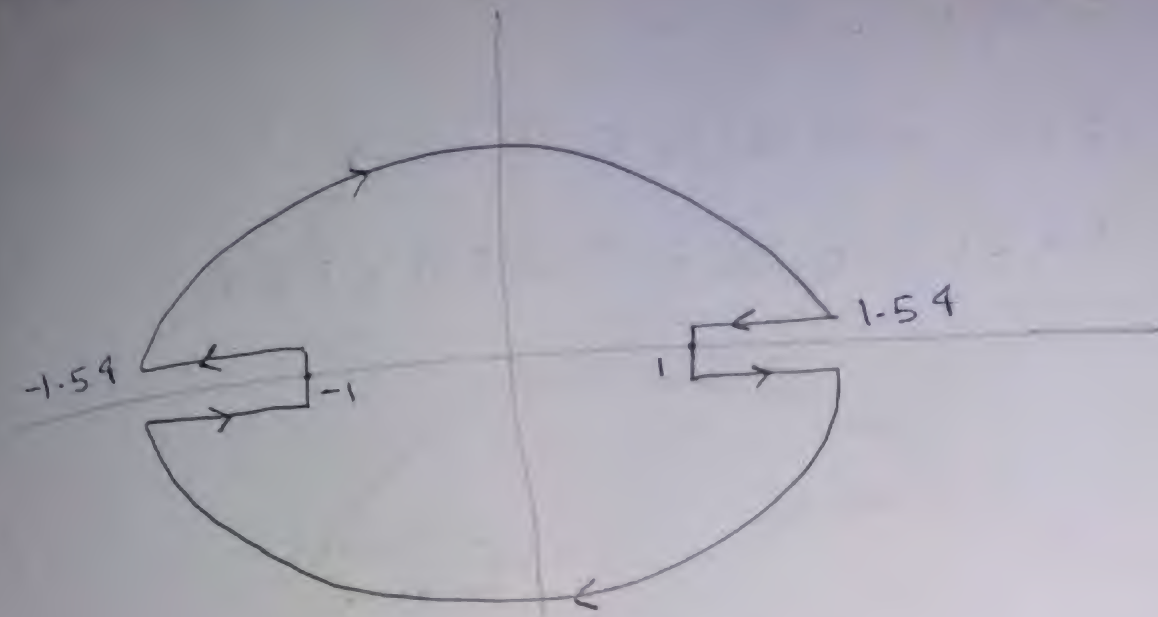
at $x = \frac{-\pi}{2}$ $\quad -1 \xrightarrow{y} 0$

$u = -\cosh y$, $v = 0$

$y = -1 \Rightarrow u = -1.54$

$y = 0 \Rightarrow u = -1$

→ the map conform the region to



* The series solution of ordinary differential equation

ــــ في هذا الجزء نهتم بدراسة حلول المعادلات التفاضلية
من الرتبة الثانية على الصورة رقم (١) والفكرة مبنية على
أن أي معادلة يكون حلها دالة . هذه الدالة يمكن فكها
لمفكوك " taylor " إذا عكست طريقة التفكير فإننا
يمكن أن نفرض مفكوك يشبه مفكوك " taylor "
و نفرض أنه حل المعادلة .

ــــ من شكل المعادلة يمكن استنتاج المفكوك .

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = f(x) \longrightarrow (1)$$

Some Notes

(1) **ordinary Point :-** (o.P)

x_0 is called ordinary point if

$$P(x_0) \neq \infty \quad ; \quad Q(x_0) \neq \infty$$

(2) **singular Point :-** (S.P)

x_0 is called S.P

if $P(x_0) = \infty$; $Q(x_0) = \infty$

(3) **Regular singular Point** (R.S.P)

x_0 is R.S.P if

$$P(x)\Big|_{x=x_0} = \infty \quad ; \quad Q(x)\Big|_{x=x_0} = \infty$$

$$(x - x_0)\, P(x)\Big|_{x=x_0} \neq \infty$$

$$(x - x_0)^2\, Q(x)\Big|_{x=x_0} = \infty$$

ليست حفظا

type of Points x_0

(O.P)

$P(x_0) \neq \infty$

$Q(x_0) \neq \infty$

$y = \sum a_n (x - x_0)^n$

نفرض الحل

S.P

$P(x_0) = \infty$

or $Q(x_0) = \infty$

R.S.P

$(x - x_0) P(x)\Big|_{x = x_0} \neq \infty$

$(x - x_0)^2 Q(x)\Big|_{x = x_0} \neq \infty$

نفرض الحل

$y = \sum a_n (x - x_0)^{n + \lambda}$

I.R.S.P $\longrightarrow$ irregular

$(x - x_0) P(x)\Big|_{x = x_0} = \infty$

or

$(x - x_0)^2 Q(x)\Big|_{x = x_0} = \infty$

ليس لها حل

$\boxed{EX}$ find a series solution of

$y'' - x y' + 2y = 0$ at $x_0 = 0$

$\boxed{sol}$

eqn $\longrightarrow$ $y'' + P(x) y' + Q(x) y = f(x)$

$P(x) = -x \qquad Q(x) = 2$

$P(0) = 0 \neq \infty \quad . \quad Q(0) = 2 \neq \infty$

$x_0 = 0$ is o.P

$y = \sum a_n (x-0)^n = \sum a_n x^n$

$\acute{y} = \sum n a_n x^n \quad ; \quad \ddot{y} = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$

بالتعويض في

$\ddot{y} - x\acute{y} + 2y = 0$

$\sum n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum n a_n x^n + 2\sum a_n x^n = 0$

<u>Coeff. of x^0</u>

$2(1) a_2 - 0\, a_0 + 2 a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = -a_0} \rightarrow (1)$

<u>Coeff. of x^1</u>

$3(2) a_3 - (1) a_1 + 2 a_1 = 0$

$\boxed{a_3 = \frac{-a_1}{6}} \longrightarrow (2)$

في كل المسائل نقارن

معامل أقل أس واللي بعده

و معامل الأس العام

Lec 19

Coeff x^n

$$(n+2)(n+2-1)\,a_{n+2} - n\,a_n + 2\,a_n = 0$$

نبدل كل $n \leftarrow (n+2)$

$$a_{n+2} = \frac{(n-2)}{(n+2)(n+1)}\,a_n$$

$* n = 2 \implies a_4 = 0$

$* n = 3 \implies a_5 = \frac{1}{(5)(4)}\,a_3 = \frac{-1}{120}\,.a_1$

$* n = 4 \implies a_6 = \frac{2}{(6)(5)}\,a_4 = 0$

← بالتعويض في الحل

$$y = \sum a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a \cdots$$

$$= a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - a_1 x^3 + 0 - \frac{1}{120} a_1 x^5$$

$$+ 0 + \cdots$$

$$= a_0(1 - x^2) + a_1\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{120} x^5 + \cdots\right)$$

الأفكار

(٢) النقطة المطلوب الحل عندها ليست $(x_0=0)$ وهي x_0

للتسهيل نضع $t=x-x_0$

فتتحول من

$$y=\sum a_n (x-x_0)^n \quad \text{إلى} \quad y=\sum a_n t^n$$

$\boxed{Ex}$ $y'' + xy' + y = 0 \quad at \quad x=1$

$$y=\sum a_n (x-1)^n \qquad t=x-1 \Rightarrow x=t+1$$

$$y''(t) + (t+1)y' + y = 0 \quad at \quad t=0$$

$$y=\sum a_n t^n$$

---

(٣) إذا وجد شروط ابتدائية مع رأس المسألة مثل.

$$(1-2x)y'' + y' = 0 \quad ; \boxed{y(0)=3 \; ; \; y'(0)=0}$$

← في آخر خطوة في المسألة نعوض بالشروط لمعرفة قيمة الثوابت وهي a_0 ، a_1.

---

(٤) إذا وجد كثيرة حدود في الطرف الأيمن مثل

$$y'' + y = x^3 + 5x^2 + 1$$

في الطرفين

← أقارن المعاملات x حتى تنتهي درجة كثيرة الحدود

ثم نقارن معامل الحد العام.

④ إذا ظهر دالة مثلثية أو أسية لو غاريتمية في أي جزء من المسألة.

a) $y'' + 5y' + y = e^{x}$

b) $y'' + xy' + \sin x \; y = 0$

b) نفك $(\sin x)$ بمفكوك $(taylor)$ ونعوض بها في المعادلة ونقارن المعادلات.

مثال على رقم a

<u>solve</u>

$$y'' + (x-1)y' = e^{x} \qquad at \quad x = 0$$

<u>Sol</u>

$$y = \sum a_n x^n \qquad y' = \sum n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum n a_n x^{n} - \sum n a_n x^{n-1}$$

$$= \sum \frac{1}{n!} x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \cdots \frac{x^n}{n!}$$

<u>Coeff x^0</u>

$$2(1)a_2 + 0 - (1)a_1 = 1$$

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{2}(1 + a_1)}$$

Coeff. of x^1 put $n=3$

$$(3)(2)a_3 + (1)a_1 - 2a_2 = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left[1 + 2a_2 - a_1\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + 1 + a_1 - a_1\right] \qquad \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

<u>Coeff. of x^n</u> . put $n \longrightarrow n+2$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n - (n+1)a_{n+1} = \frac{1}{n!}$$

$\boxed{n=2}$

$$12a_4 + 2a_2 - 3a_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{2} - 1 - a_1 + 1\right]$$ ~~بالتعويض~~

بالتعويض في الصورة

$$y = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^2 \cdots$$

نعوض بقيم الثوابت .